

〈测量技术〉

环形高次非球面参数的测试

宋俊儒, 刘大礼, 邢 辉

(北京空间机电研究所, 北京 100094)

摘要: 环形高次非球面在航天遥感器的光学系统中应用越来越广泛, 为了精确测量其非球面参数和矢高, 在探讨三坐标测量机非球面检测扫描路径的基础上, 分析了测试数据与理论数据之间的内在数学关系, 提出了一种基于坐标变换规范测试数据, 通过空间数据转换将测试数据降维, 数据处理由三维空间转换到二维平面, 进而在平面内做多项式拟合求解非球面母线的检测方案。通过泰勒级数展开, 对比分析了母线多项式拟合方程和标准非球面方程之间的系数对应关系, 并对某高次非球面进行实物检测。检测结果表明矢高拟合精度达 0.001 mm, 非球面系数拟合精度达到与设计值数量级一致, 检测方案合理可行, 为类似高次非球面的检测提供了一条有效可行的检测途径。

关键词: 环形高次非球面; 旋转母线; 矢高; 非球面系数

中图分类号: V447.3 文献标志码: A 文章编号: 1001-8891(2019)03-0290-07

Measurement of Parameters of High-order Aspheric Ringy Surface

SONG Junru, LIU Dali, XING Hui

(Beijing Institute of Space Mechanics & Electricity, Beijing 100094, China)

Abstract: In order to measure the aspherical parameters and arc height, taken the lens distance measurement as goal, a method is presented in this article which can calculate the generatrix equation through polynomial fitting. Through discussing the scanning path of aspheric surface, analyzing the relationship between the measurement data and the theoretical data, normalizing the measurement data based on coordinate transform, the data processing is transferred from space into plane in which the generatrix is solved. The relationship between the parameters of the generatrix fitting equation and the standard equation is comparative analyzed. The mathematical expression of high-order aspheric parameters is derived. The testing result of an high-order aspheric surface indicated that the scheme is reasonable and feasible. The fitting precision of rise can reach 0.001 mm which meets the testing requirement.

Key words: high-order ringy aspheric surface, generatrix, arc height, aspheric parameters

0 引言

在航天遥感相机中, 环形高次非球面光学元件的应用越来越广泛。对该类元件的几何参数(比如矢高、曲率半径、非球面系数、偏心等)的测试对光学系统的仿真分析、性能优化以及实物系统的光学装调都十分重要。按实际测量值重新计算光学系统参数, 仿真像差和光学传递函数, 根据结果分配公差, 可有效改善像质, 达到或接近光学系统原设计的性能指标。

近几年来, 除了传统的非球面检测方法外, 基于

三维空间面形扫描拟合的方法在二次非球面上取得了成功的应用^[1], 二次曲面的三坐标接触式检测达到了很高的精度^[2], 面形和非球面参数拟合精度已不存在大的问题, 甚至通过垂轴成像测量实现了大张角凸非球面镜的测量^[3], 三维曲面拟合也取得一定进展, 得到了一些算法^[4]。但这些多限于二次非球面, 对于高次非球面, 尤其是环形高次非球面参数拟合方面尚无有效的数学模型。笔者在研究环形高次非球面面形三维接触扫描的基础上, 提出了一种通过坐标变换将测试数据标准化, 再通过映射原理将三维空间数据转

换为二维平面数据,进而对非球面旋转母线进行多项式拟合的方案。根据旋转母线拟合方程可精确求解环形高次非球面参数。有效解决了环形高次非球面矢高的精确测量和参数测量问题。

1 高次非球面数据采集

某空间遥感相机的光学系统装调公差极为严格,倾斜公差 $20''$,镜间距公差 0.02 mm ,为保证光学系统最终成像质量,镜间距的高精度测试十分必要。该光学系统采用的主镜为8次高次非球面且顶部中间带孔,如图1所示。将基准转换到结构,镜间距的测试转化为主镜矢高的测试,由于主镜属于环形高次非球面,主镜矢高的测试最终归结为对环形高次非球面参数的测试和拟合求解。

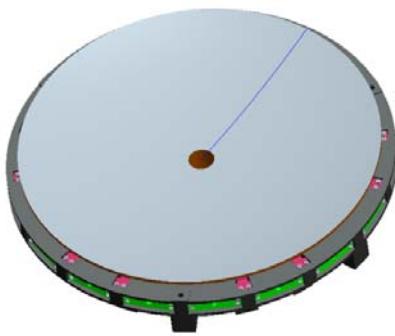


图1 某光学相机主镜结构图

Fig.1 Structure of a primary mirror of an optical camera

利用Hexagon Leitz Infinity三坐标测量机对非球面光学元件面形进行检测,Hexagon Leitz Infinity三坐标测量机采用动态单点探测技术或高速扫描技术,可实现 $1200\text{ mm} \times 1000\text{ mm} \times 700\text{ mm}$ 空间范围的任何位置测量,误差值在 $0.3+L/1000\mu\text{m}$ 之内(L 为测量点相对于标定点的距离,单位mm)。检测路径通常有3种:子午线式检测路径、光栅式检测路径和圆周式检测路径^[5]。文章拟通过旋转母线拟合的途径检测高次非球面,而且三坐标测量机本身检测精度足够高(小于 $0.5\mu\text{m}$),故选用子午线式检测路径。

子午线式检测路径为多条经过非球面表面的子午线,克服了检测路径只测量一条或两条经过非球面光学元件对称轴的子午线的缺点,较多地考虑到了整个非球面的面形,有利于提高补偿加工中数据曲线拟合的精度,如图2所示。

三坐标测量机所用测球总有一定的半径 r ,利用接触式测球测量待测表面子午线时,直接测量所得数据是测球中心轨迹,它是与被测曲面相距 r 的包络面,如图3所示^[6-7]。要得到被测曲面的真实数据,需要求出

球心轨迹构成的包络面,进而对检测数据进行测球半径修正。

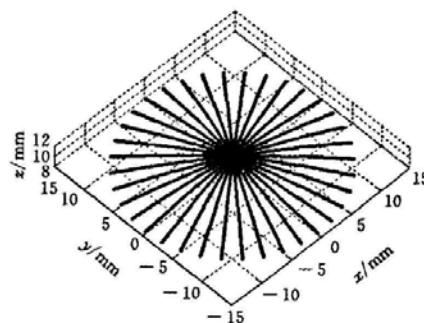


图2 子午线检测路径

Fig.2 Meridian measuring path

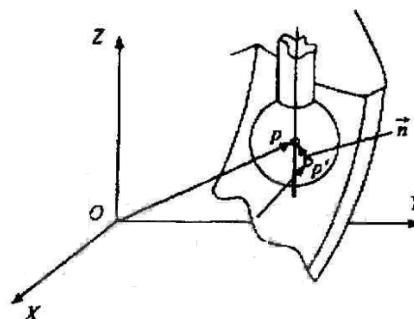


图3 测球半径修正示意图

Fig.3 Diagram of the measuring head's radius compensation

2 环形高次非球面拟合

环形高次非球面可由平面坐标系中的高次曲线(称为旋转母线)绕轴旋转得到。对该类非球面母线的拟合可通过下述步骤实现:①将非球面测试数据通过坐标变换转换为标准坐标系下的面形数据;②将三维面形数据通过空间数据转换映射到 XOZ 平面,得到二维旋转母线数据;③在 XOZ 平面内对数据做多项式拟合,得到高次非球面旋转母线方程;④对比旋转母线拟合方程和标准方程,求解矢高和非球面系数。

2.1 坐标变换

标准非球面曲线方程^[8]:

$$z = \frac{cx}{1 + \sqrt{1 - (K+1)c^2x^2}} + A_2x^4 + A_3x^6 + \cdots + A_nx^{2n} \quad (1)$$

式中: $c=1/R$, R 为顶点曲率半径; K 为二次曲面系数; A_2, \dots, A_n 为高次非球面系数。

设非球面面形测试数据为 (x_i, y_i, z_i) ,过数据点和 Z 轴做切平面 XOZ 。所有数据点均可绕 Z 轴旋转到切平面 XOZ 平面内,这样就实现了三维测试数据到二维

数据的映射，达到了降低纬度的目的，大大简化了数据处理过程。

如图4所示，高次非球面为轴对称旋转曲面，假设其旋转轴为Z轴，母线为SAM， $P(x_0, y_0, z_0)$ 为母线SAM上一点，当SAM绕Z轴旋转到XOZ平面内时，P点旋转到 P' ，且有：

$$\begin{cases} PO = P'O \\ \angle POA = \angle P'OA \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)可得，XOZ平面内 P' 坐标为：

$$\begin{aligned} x_{P'} &= PO \times \sin(\angle POA) \\ z_{P'} &= PO \times \cos(\angle POA) \end{aligned} \quad (3)$$

式中： $PO = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ ；

$$\angle POA = \arccos\left(z_0 / \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\right)。$$

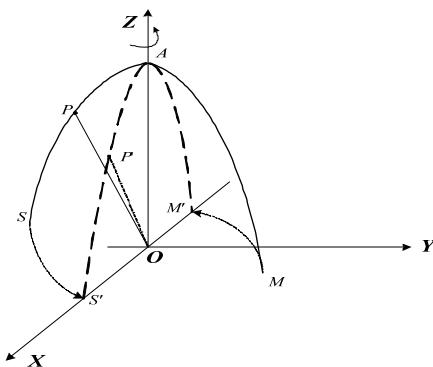


图4 高次非球面母线绕竖直轴旋转示意图

Fig.4 Diagram of the generatrix of the high-order aspheric surface rotate around an axis

对非球面面形进行接触式测量时，由于存在非球面组件的装配精度误差、测量坐标系的建立误差、测量仪器本身的误差、非球面自身几何尺寸偏差等，测试数据与非球面理论数据之间往往存在微小偏差。测试数据 (x_i, y_i, z_i) 可看作是非球面面形理论坐标为 (x, y, z) 绕X轴转动 θ_x 后，沿X轴平移 Δx 、Z轴平移 Δz 后的结果，用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & -\sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x \sin \theta_y \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (4)$$

将转动变换矩阵记为：

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & -\sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x \sin \theta_y \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ -\sin \theta_y & -\sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{pmatrix} \quad (5)$$

则逆变换为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_2 + \Delta x \\ y_2 + \Delta y \\ z_2 + \Delta z \end{pmatrix} \quad (6)$$

式中： $T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y \\ -\sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \cos \theta_y \\ \cos \theta_x \sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{pmatrix}$ 。

(x_i, y_i, z_i) 是直接测量得到的非球面面形三维坐标，一般情况下原点与非球面理论顶点不重合，非球面对称轴与坐标系Z轴也不重合。根据上述坐标变换的逆变换，从测量值中提取 θ_x 、 Δx 和 Δz 后，可将 (x_i, y_i, z_i) 变换到XOZ平面内^[9-11]，得到平面坐标系下的数据 (x'_i, z'_i) ，如图5所示。

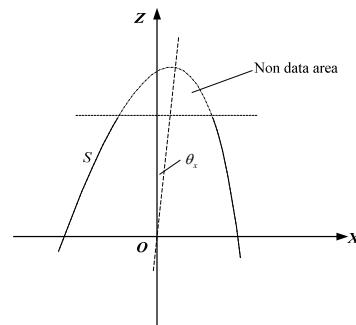


图5 测试数据二维化示意图

Fig.5 Diagram of simulation of the measuring data

通过下述方法可从测试数据中提取 θ_x 、 Δx 和 Δz ，进而计算标准高次非球面方程(1)的参数 R 、 k 、 A_1 ， A_2 ，…， A_n 。

将测试数据通过空间转换映射到二维平面XOZ后，采用spline线性插值的方法填充数据，记填充后的数据为曲线S。用平行线簇截曲线S，得到所有线段的中点，这些中点可拟合成一条直线L，如图6所示。当且仅当平行线簇的法线与非球面对称轴平行时，所有线段的中点到拟合直线的距离平方和最小^[12]。

设k为平行线簇斜率，则最终的拟合直线L即为非球面对称轴在XOZ平面内的投影。测量数据旋转角为：

$$\theta_x = 90^\circ - \arctan k \quad (7)$$

设直线L与曲线S的交点为 (x_0, z_0) ，则有：

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_0 / \cos \theta_x \\ \Delta z &= z_0 + x_0 / \tan \theta_x \end{aligned} \quad (8)$$

2.2 高次非球面母线拟合

三坐标测量机沿子午线路径扫描高次非球面, 得到测试数据 (x_i, y_i, z_i) 。通过2.1将三维数据映射到XOZ平面, 得到平面坐标系下的数据 (x'_i, z'_i) 。再利用上述坐标变换所述方法求得 θ_x 、 Δx 和 Δz 。通过公式(6)将数据变换到标准坐标系下, 在XOZ平面内对标准数据多项式拟合。用 $2n$ 偶次多项式拟合实验数据, 即:

$$z = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i} \quad (9)$$

式中: a_i 为偶次多项式的系数。

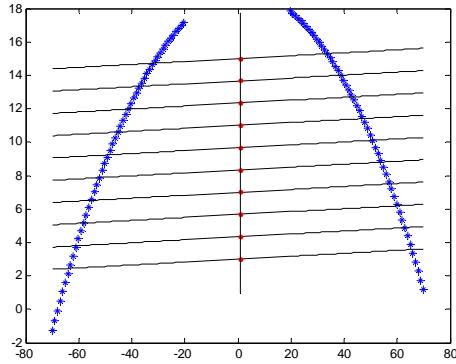


图6 平行线簇求解旋转角示意图

Fig.6 Diagram of the solution of rotation with parallel line cluster

根据最小二乘法, 要获得最佳拟合曲线, 应满足公式:

$$e = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^{2i} - z_i \right)^2 \rightarrow \min \quad (10)$$

将(9)式分别对系数 P_i ($i=1, 2, \dots, 9$)求偏导, 并令导数为零, 可得方程组。代入数据可求得最佳拟合系数。广义逆是解该类方程组的有效手段。

将标准非球面曲线方程(1)变形为:

$$z = \frac{R}{k} - \frac{\sqrt{R^2 - kH}}{k} + A_2 H^2 + A_3 H^3 + \dots + A_n H^n \quad (11)$$

式中: $k=K+1$, $H=x^2$ 。

令 $g(H)=\sqrt{R^2 - kH}$, 泰勒级数展开^[13]:

$$\begin{cases} g(H) = \sqrt{R^2 - kH} & g(0) = R \\ g'(H) = -\frac{1}{2}k(R^2 - kH)^{-1/2} & g'(0) = -\frac{k}{2R} \\ g''(H) = -\frac{1}{4}k^2(R^2 - kH)^{-3/2} & g''(0) = -\frac{k^2}{4R^3} \\ g^{(3)}(H) = -\frac{3}{8}k^3(R^2 - kH)^{-5/2} & g^{(3)}(0) = -\frac{3k^3}{8R^5} \\ g^{(4)}(H) = -\frac{15}{16}k^4(R^2 - kH)^{-7/2} & g^{(4)}(0) = -\frac{15k^4}{16R^7} \\ g^{(5)}(H) = -\frac{105}{32}k^5(R^2 - kH)^{-9/2} & g^{(5)}(0) = -\frac{105k^5}{32R^9} \\ \vdots & \end{cases} \quad (12)$$

公式(12)代入方程(11), 有:

$$\begin{aligned} z = & \frac{1}{2R}x^2 + \left(A_2 + \frac{k}{8R^3} \right)x^4 + \\ & \left(A_3 + \frac{k^2}{16R^5} \right)x^6 + \left(A_4 + \frac{5k^3}{128R^7} \right)x^8 + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

对比公式(13)和(9), 得到多项式拟合表达式对应的标准非球面表达式的任意高阶偶次非球面参数:

$$\begin{cases} SH = a_0 & (\text{矢高}) \\ R = \frac{1}{2a_1} \\ k = \left[\frac{2^n n! R^{2n+1} a_{n+1}}{\prod_{i=1}^n (2i-3)} \right]^{1/n} & n = 2, 3, \dots \\ A_n = a_n + \frac{k^{n-1} \prod_{i=1}^n (2i-3)}{2^n n! R^{2n-1}} & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (14)$$

2.3 环形高次非球面检测实验

以高精度加工的非球面透镜为实测对象, 非球面母线方程见公式(15), 划定顶部直径 $\phi 40\text{ mm}$ 范围为非数据采集区, 模拟环形高次非球面。根据三坐标测量机检测原理, 沿子午线检测路径每 30° 采集一条数据, 共计12条。每条子午线上取点的步长均为 0.2 mm , 得到22个点, 12条线共242个点, 如图7所示。对采集到的数据做球头修正, 修正方法采用kriging插值法^[14]。即利用kriging插值法拟合测头中心曲面, 得到曲面相应点的法线方向, 然后计算每个测点的偏移值, 最后对偏移后的测点数据再次应用kriging插值法, 得到图8所示的补偿后的环形高次非球面的检测数据。

$$\begin{aligned} Z = & \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2 r^2}} + \alpha_2 r^4 + \alpha_3 r^6 + \alpha_4 r^8 \\ c = & 1/137.72, \quad k = 0, \quad \alpha_2 = -4.11 \times 10^{-9}, \\ \alpha_3 = & -1.407 \times 10^{-13}, \quad \alpha_4 = -2.251 \times 10^{-17} \end{aligned} \quad (15)$$

将数据映射到XOZ平面内, 并通过坐标变换数据处理, 由公式(7)和(8)从测量数据中提取到非球面刚性位移参数 $\theta_x=28.9''$, $\Delta x=0.0098$, $\Delta y=0.0181$ 。代入公式(6)修正测量数据。

利用最小二乘法拟合修正后的测量数据, 如图9所示, 得到高次非球面母线方程^[15-16]:

$$z = p_8 x^8 + p_6 x^6 + p_4 x^4 + p_2 x^2 + p_0 \quad (16)$$

式中: $p_2=6.6038 \times 10^{-17}$, $p_4=-8.1946 \times 10^{-13}$, $p_6=2.4916 \times 10^{-9}$, $p_8=-4.6079 \times 10^{-17}$, $p_0=17.84155632$ 。

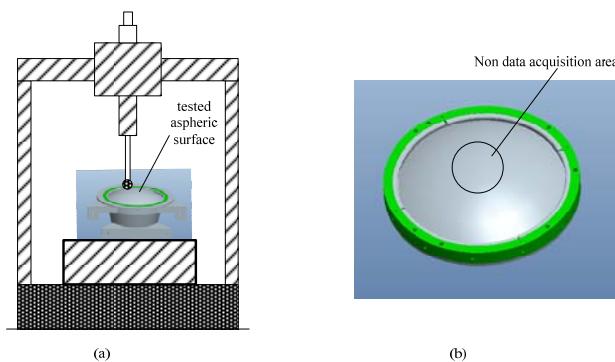


图 7 某高次非球面三坐标测量图 (a)三坐标测量示意图 (b)待测高次非球面透镜

Fig.7 Diagram of the coordinate measuring of a high-order aspheric (a) Diagram of the coordinate measurement (b) the under test high-order aspheric lens

将方程(16)系数代入公式(14)可得非球面参数 $R = 137.702$, $k=0$ 以及非球面系数。将标准非球面表达式(15)改写为形式如(13)的泰勒展开式, 拟合参数与实测参数对比结果见表 1 和表 2 所示。现有 Taylor 轮廓仪可有效测试非球面参数, 且精度较高, $p_2=3.6317 \times 10^{-3}$, $p_4=-4.5375 \times 10^{-9}$, $p_6=-2.1324 \times 10^{-13}$, $p_8=-4.6079 \times 10^{-17}$, 但对于环形高次非球面的矢高则给不出有效测量值。

通过拟合所得的非球面母线方程补全顶部环形空缺的面形数据, 并做相应的逆映射得到非球面完整的三维空间数据, 如图 10 所示。由旋转母线拟合方程, 通过空间数据逆变换得到补全中间孔后的非球面面形, 如图 11 所示, 母线绕 Z 轴旋转得到非球面, 如图 12 所示。

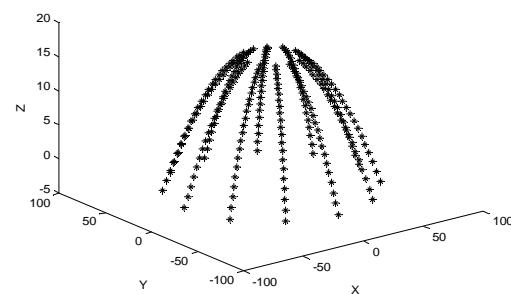


图 8 三坐标扫描数据点空间分布

Fig.8 Spatial distribution of data points

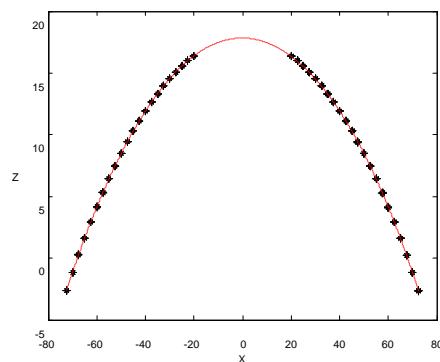


图 9 修正数据的多项式拟合

Fig.9 The polynomial fitting of revised data

3 拟合误差分析

对于光学系统中使用的环形高次非球面, 如图 12 所示, 由于装调误差的存在, 光学镜面实际光轴与 Z 轴之间存在一定的偏差 α 。在现有装调手段的保证下, α 一般很小, 为秒级, 最多分级。

表 1 高次非球面系数拟合值与理论值

Table 1 Theoretical value and fitted value of the high-order asphericity parameters

	arc height /mm	k	8 term coefficient	6 term coefficient	4 term coefficient	2 term coefficient
Theoretical value	17.842	0	-2.251×10^{-17}	-1.407×10^{-13}	-4.11×10^{-9}	3.6306×10^{-3}
Fitted value	17.841	0	-4.720×10^{-17}	-9.957×10^{-13}	-4.386×10^{-8}	3.6313×10^{-3}

表 2 高次非球面几何参数拟合值与理论值

Table 2 Theoretical value and fitted value of the aspherical geometry parameters

	Curvature radius/mm	Eccentricity/mm	Eccentric angle/''
Theoretical value	137.72	$\Delta x=0.015, \Delta y=0.02$	36.4
Fitted value	137.691	$\Delta x=0.012, \Delta y=0.018$	28.9

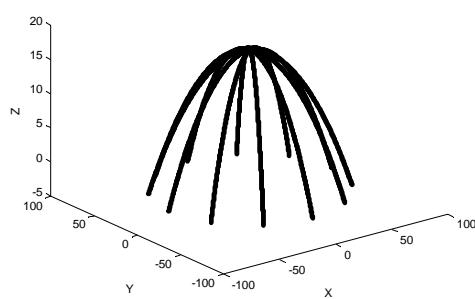


图 10 拟合母线补全中间孔后数据空间分布

Fig.10 Spatial distribution of data points on the generatrix

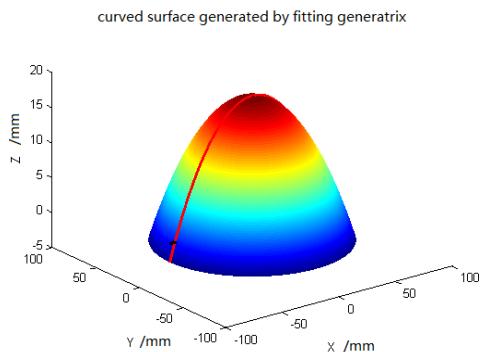


图 11 拟合母线旋转所得高次非球面

Fig.11 High-order aspheric generated by the generatrix

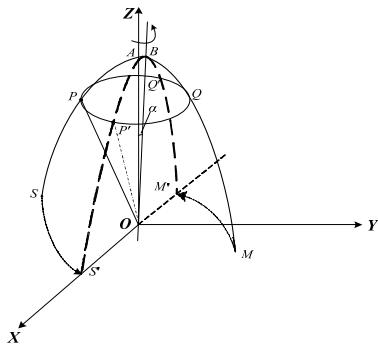


图 12 环形高次非球面示意图

Fig.12 Diagram of the high-order ringy aspheric surface

图 12 所示为环形高次非球面, 其中 $PP'QQ'$ 表示非球面顶部的环形孔, 由于元件的倾斜导致测量坐标系出现偏差, 虚拟顶点 B 在实测轴 OB 上, 不在理论光轴 Z 轴上。非球面上的点与光轴 OB 之间的夹角大于等于 $\angle POB$, $\angle POB = \angle POA + \alpha$ 。

以顶点曲率半径 $R=100$ 的抛物线旋转曲面为例, 矢高 $OB=15$, 顶部挖取 $\phi 30$ (即 $PQ=30$) 的孔, 孔径比为 0.3, 则抛物线上点与 Z 轴最小夹角 $\angle POA=15.89^\circ$, $\angle POA$ 远大于 α 。取 $\alpha=1'$, 则 $\angle POB \approx \angle POA + \alpha \approx 15.907$, 将 $\angle POB$ 带入公式(6), 得到的坐标误差约为 0.003, 造成的曲面偏心约为 $0.5''$, 相对误差为 $0.5''/1'=8.3\%$, 对数据做旋转处理将三维数据转化

为平面数据时, 没有任何影响, 可近似认为 $\angle POB = \angle POA$ 。中间孔对高次非球面数据处理的影响可忽略。

4 结论

针对航天遥感相机中经常用到的环形高次非球面光学镜, 文章在研究三坐标测量机面形扫描路径的基础上, 建立了一种通过坐标变换规范数据, 空间数据转换对数据降维, 进而对数据做多项式拟合求解环形高次非球面旋转母线的方案, 推导了拟合方程与标准方程参数之间的对应关系, 可方便有效地求解非球面的矢高、曲率半径、偏心、非球面系数等。对某高次非球面的实测结果表明测试方法有效合理, 精度满足要求, 为类似高次非球面提供了一条有效可行的检测途径。针对离轴非球面镜的数据采集、处理需做进一步探讨。

参考文献:

- [1] 张曦, 胡春华, 陈五一. 二次曲面拟合与拟合参数不确定度分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2006, 32(9): 1091-1095.
ZHANG Xi, HU Chunhua, CHEN Wuyi. Quadratic surface fitting and uncertainty analysis of fitting parameters[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics. 2006, 32(9): 1091-1095.
- [2] 王建明. 三坐标轮廓测量仪检测非球面研究[D]. 苏州: 苏州大学, 2013.
WANG Jianming. Study on aspheric surface measurement using coordinate contour measuring machine[D]. Suzhou: Soochow university, 2013.
- [3] 万勇建, 范斌, 袁家虎. 大型非球面主镜细磨中的一种在线监测技术[J]. 光电工程, 2005, 32(1): 1-4.
WAN Yongjian, FAN Bin, YUAN Jiahu. An on-line measuring technique for lapping large aspheric mirror[J]. Opto-Electronic Engineering, 2005, 32(1): 1-4.
- [4] 黄大刚, 张恒, 李树荣, 等. 形状测量大角度非球面塑料透镜[J]. 中国光学, 2005(9): 516-519.
HUANG Dagang, ZHANG Heng, LEE Shah Rong, et al. Shape measurement of aspheric plastic lens with large angle[J]. Chinese Optics Letters, 2005(9): 516-519.
- [5] 郭隐彪, 郭江, 王振忠. 非球面检测路径与高精度曲线拟合算法研究[J]. 中国机械工程, 2008, 19(10): 1201-1204.
GUO Yinbiao, GUO Jiang, WANG Zhenzhong. Study on Measuring Path and High-precision Curve Fitting Algorithm for Axisymmetric Optics[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(10): 1201-1204.
- [6] 李春. 三坐标测量机的曲面匹配与测头半径修正[D]. 天津: 天津大学硕士学位论文, 2004.
LI Chun. The surface matching and the measuring head's radius

- compensation of coordinate measuring machine[D]. Tianjin: Tianjin University, 2004.
- [7] 王银河, 阴晓俊, 姚春龙, 等. 反光镜测试中曲面数据采集及拟合[J]. 光学仪器, 2012, 34(3): 1-4.
WANG Yinhe, YIN Xiaojun, YAO Chunlong, et al. Study on curved surface acquisition and fitting in reflector test[J]. *Optical Instruments*, 2012, 34(3): 1-4.
- [8] 潘君骅. 光学非球面的设计、加工与检验[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 2004: 1-5.
PAN Junhua. *The Design, Manufacture and Test of the aspherical Optical Surface*[M]. Suzhou: Suzhou University Press, 2004: 1-5.
- [9] 张军强, 董得义, 吴清文, 等. 光学遥感器镜面形误差及刚体位移处理方法[J]. 仪器仪表学报, 2011, 32(6): 242-247.
ZHANG Junqiang, DONG Deyi, WU Qingwen. Treatment of surface figure error and rigid body motion for mirror/lens in remote sensor[J]. *Chinese Journal of Science Instrument*, 2011, 32(6): 242-247.
- [10] 张星祥, 任建岳. 非球面镜检测误差的逆向求解法[J]. 航空精密制造技术, 2003, 39(6): 26-30.
ZHANG Xingxiang, REN Jianyue. Inver solution for measuring aspherical mirror error[J]. *Aviation Precision Manufacturing Technology*, 2003, 39(6): 26-30.
- [11] 郭玲玲, 张星祥, 张立国, 等. 离轴非球面镜检测中坐标系偏差对参数拟合的影响[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(10): 2800-2804.
GUO Lingling, ZHANG Xingxiang, ZHANG Liguo. Influence of coordinate deviation on parameter fitting in testing off-axis ahpherics[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2013, 42(10): 2800-2804.
- [12] 黄大刚, 王宝光, 辛运帷. 从测量值计算非球面参数[J]. 纳米技术与精密工程, 2008, 6(3): 212-216.
HUANG Dagang, WANG Baoguang, XIN Yunzhi. Calculation of aspheric parameters from measuring values[J]. *Nanotechnology and Precision Engineering*, 2008, 6(3): 212-216.
- [13] 同济大学数学系. 高等数学 (上) [M]. 北京: 高等教育出版社, 1996: 207-214.
Department of Mathematics of Tongji University. *Higher Mathematics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1996: 207-214.
- [14] Mayer J R R, Mir Y A, Trochu F, et al.. Touch probe radius compensation for coordinate measurement using kriging interpolation[C]//*Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B Journal of Engineering Manufacture*, 1997, 211(1): 11-18
- [15] 陈基伟. 工业测量数据拟合研究[D]. 上海: 同济大学土木工程学院, 2005.
CHEN Jiwei. Study on industrial measuring data fitting[D]. Shanghai: College of civil engineering, Tongji University, 2005.
- [16] 居余马. 线性代数[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
JU Yuma. *Linear Algebra*[M]. Beijing: TsingHua University Press, 2002.